Πιθανότητες:

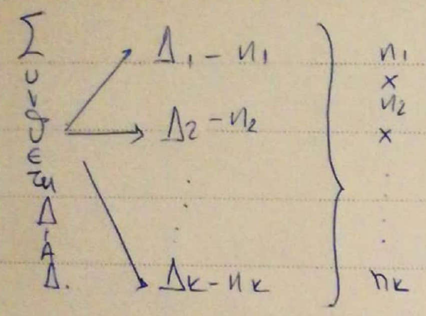
12/10/17

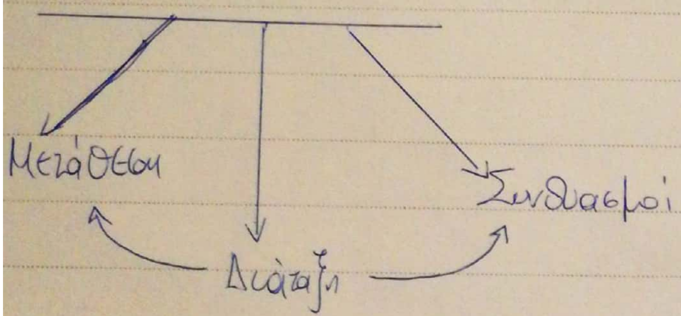
Βιβλίο Σημειώσ

Αύριο

Γρ. 3098

Πολλική Αρχή:





Μετάθεση: Μετάθεση n-διακεκριμένων στοιχείων ονομάζεται κάθε δυνατή τοποθέτηση των n-στοιχείων (το ένα δίπλα από το άλλο) σε γραμμή με μια συγκεκριμένη σειρά και τάξη.

π.χ. Μεταθέσεις Α, Β, Γ

ΑΒΓ - ΑΓΒ - ΒΑΓ - ΒΓΑ - ΓΑΒ - ΓΒΑ

Διάταξη: Ονομάζουμε διάταξη n-ανά κ $(1 \leq \kappa \leq n)$ κάθε δυνατή επιλογή κ από n διακεκριμένα στοιχεία και τοποθέτηση των κ-στοιχείων σε σειρά, σε γραμμή με μια συγκεκριμένη τάξη.

(μετάθεση)

π.χ. Διατάξεις 3 ανά 2 των Α, Β, Γ:

ΑΒ - ΒΑ - ΑΓ - ΓΑ - ΒΓ - ΓΒ

Διάταξη → Επιλογή μέρους

Διάταξη → Μετάθεση

Παρατήρηση: Αν $\kappa = n$ τότε Διάταξη = Μετάθεση

Συνδυασμός: Ονομάζουμε συνδυασμό ν-ανά κ $(1 \le \kappa \le \nu)$ κάθε διατ. επιλογή κ από ν-διακεκριμένα στοιχεία (χωρίς περαιτέρω να ενδιαφέρει η μετάθεση των κ-στοιχείων που επιλέχτηκαν)

π.χ. Συνδυασμοί 3 ανά 2 των Α, Β, Γ

ΑΓ, ΑΒ, ΒΓ, ~~ΓΒ~~

Παρατήρηση: α) Συνδυασμός → 1º μέρος της διάταξης

β) Διάταξη ≡ Συνδυασμός και μετάθεση

Πλήθος μεταθέσεων - διατάξεων - συνδυασμών:

Πρόταση: α) Το πλήθος των διατάξεων ν ανά κ $(\nu, \kappa \in \mathbb{N}, 1 \le \kappa \le \nu)$ συμβολίζεται με $(\nu)_\kappa$ και είναι $(\nu)_\kappa = \dfrac{\nu!}{(\nu-\kappa)!}$, $\nu! = 1 \times \ldots \times \nu$

$0! = 1$

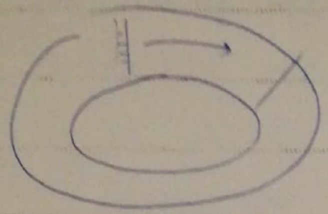
β) Πλήθος μεταθέσεων ν-στοιχείων είναι $\nu!$

γ) Το πλήθος των συνδυασμών ν ανά κ συμβολίζεται με $\binom{\nu}{\kappa}$ και είναι

$$\binom{\nu}{\kappa} = \frac{\nu!}{\kappa!(\nu-\kappa)!}$$

Παρατήρηση: Διώνυμο Νεύτωνα: $(x+y)^\nu = \sum_{\kappa=0}^{\nu} \binom{\nu}{\kappa} x^\kappa y^{\nu-\kappa}$

Παραδείγματα: ① 8 δρομείς στην αφετηρία

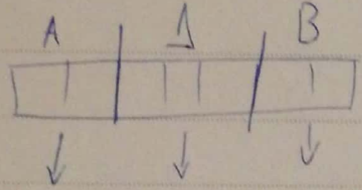


8!

② 2 ομάδων μπάσκετ
2 διαιτητές

διαιτητές ανάμεσα ομάδων

Οι αρχικές 5-άδες 2 ομάδων και 2 διαιτητές πρόκειται να φωτογραφηθούν κανονικά σε σειρά και γραμμή. Πόσες διατάξεις φωτογραφίες αν οι διαιτητές μπορούν να μπουν ανάμεσα στις ομάδες



$2\times(5! \times 2! \times 5!)$

αν δεν υπήρχαν κανόνες στη σειρά των ομάδων

③ Πόσες τετραμελείς επιτροπές μπορούν να σχηματιστούν με 5 άντρες και 4 γυναίκες αν μπορούν στην επιτροπή να συμμετέχουν 2 άντρες και 2 γυναίκες;

Δεν έχει αξία η σειρά που θα μπουν άρα χρησιμοποιώ συνδυασμό

$$\binom{5}{2} \times \binom{4}{2} = \dots$$

4) Με πόσους τρόπους μπορεί να σχηματισθεί 3-μελής επιτροπή αποτελούμενη από πρόεδρο, γραμματέα και μέλος αν υπάρχουν 20 υποψήφιοι;

1ος τρόπος: $20 \times 19 \times 18$

2ος τρόπος: $\dfrac{20!}{(20-3)!} = \dfrac{20!}{17!} = \dfrac{1\times \dots \times \cancel{17} \times 18 \times 19 \times 20}{1\times \dots \times 17} = 18\times 19\times 20$

5) Φοιτητής πρέπει να απαντήσει σε 7 από τις 10 ερωτήσεις.

α) Πόσες επιλογές έχει;

$$\binom{10}{7}$$

β) Πόσες επιλογές έχει αν απαντήσει σε τουλάχιστον 3 από τις 5 πρώτες;

1 2 3 4 5 | 6 7 8 9 10

1ο σενάριο: 3 από τις 5 πρώτες <u>και</u> 4 από τις 5 δεύτερες

2ο σενάριο: 4 από τις 5 πρώτες <u>και</u> 3 από τις 5 δεύτερες

3ο σενάριο: 5 από τις 5 πρώτες <u>και</u> 2 από τις 5 δεύτερες

1ο σενάριο: $\binom{5}{3} \times \binom{5}{4}$

2ο σενάριο: $\binom{5}{4} \times \binom{5}{3}$

3ο σενάριο: $\binom{5}{5} \times \binom{5}{2}$

$$\binom{5}{3}\times\binom{5}{4} + \binom{5}{4}\times\binom{5}{3} + \binom{5}{5}\times\binom{5}{2}$$

Πολυωνυμικός Συντελεστής:

Μετάθεση: Τοποθέτηση σε σειρά n-διαφορετικών στοιχείων

Ερώτημα: Τι γίνεται αν τα n-στοιχεία δεν είναι ένα προς ένα διαφορετικά αλλά είναι κατά ομάδες διαφορετικά;

Παράδειγμα: ① ② ③ $3! = 6$ (Αν έχω χρώμα)

① ② ③	② ① ③	① ② ③
① ③ ②	② ③ ①	① ~~③ ②~~
③ ① ②		② ① ③
③ ② ①		② ③ ①

Πρόταση: Έστω n-αντικείμενα, από τα οποία k_1 είναι κατηγορίας 1, k_2 είναι κατηγορίας ή ομάδας 2 κ.οκ. k_r είναι κατηγορίας ή ομάδας R, όπου $k_i \in \mathbb{N}$

Οι δυνατοί τρόποι με τους οποίους τα n-κατά ομάδες διαφορετικά στοιχεία μπορούν να τοποθετηθούν σε γραμμή, σε σειρά συμβολίζεται με $\binom{n}{k_1, k_2, \ldots k_r}$ και είναι

$$\binom{n}{k_1, k_2, \ldots k_r} = \frac{n!}{k_1!\, k_2! \ldots k_r!}$$

Παράδειγμα: Πόσες λέξεις μπορούν να σχηματισθούν (ανεξάρτητα της γραμματικής ή συντακτικής ακρίβειας) από αντιμετάθεση των γραμμάτων της λέξης ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ;

$n = 10$

$r = 8$

$k_1 = k_2 = k_3 = 1$

$k_4 = 2$

$k_5 = 1$

$k_6 = 1$

$k_7 = 2$

$k_8 = 1$

$$\binom{10}{1\ 1\ 1\ 2\ 1\ 1\ 2\ 1} = \frac{10!}{2!\,2!}$$

Παράδειγμα: Πόσες ακολουθίες DNA μεγέθους 1000 μπορώ να φτιάξω που αποτελούνται από 300 A, 200 T, 400 C, 100 G;

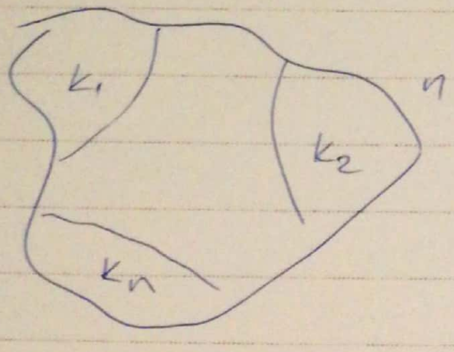
$$\binom{1000}{300,\ 200,\ 400,\ 100}$$

Παρατήρηση: α) $(x_1 + \dots x_r)^n = \sum_{\{(k_1 \dots k_r)\, k_1+k_2 \dots k_r = n\}} \binom{n}{k_1, \dots k_r} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_r^{k_r}$

β) $\binom{n}{k_1\, k_2 \dots k_r} = \binom{n}{k_1} \times \binom{n-k_1}{k_2} \times \binom{n-k_1-k_2}{k_3} \times \dots \times \binom{n-k_1 \dots -k_{r-2}}{k_{r-1}} \times$

$$\binom{n-k_1- \dots -k_{r-1}}{k_r}$$

$\frac{n!}{k(n-k_1)!} \quad \frac{(n-k_1)!}{k_2!(n-k_1-k_2)!} \quad / \quad \ldots\ldots$

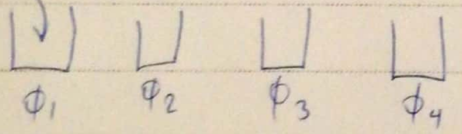


Παράδειγμα: 8 Στρατιώτες πρόκειται να τοποθετηθούν σε 4 φυλάκια. Πόσοι τρόποι τοποθέτησης υπάρχουν α) αν δεν υπάρχει κανένας περιορισμός β) Κάθε φυλάκιο πρέπει να πάρει 2 στρατιώτες

α) 1^{os} φαντάρος → 4 φυλάκια
2^{os} —‖— → 4 —‖—
⋮
8^{os} —‖— → 4 —‖—

$\left.\right\} 4^8$

8 φαντάρος



4^8

β) $\binom{8}{2} \times \binom{6}{2} \times \binom{4}{2} \times \binom{2}{2}$

$\parallel$

2^{os} τρόπος: $\binom{8}{2\ 2\ 2\ 2}$

Scanned by CamScanner

Ασκήσεις στη Συνδυαστική Ανάλυση

Άσκηση 1: Στον κώδικα Morse, μια λέξη μήκους *N* αποτελείται από μια σειρά *N* χαρακτήρων καθένας από τους οποίους είναι ένα από τα σύμβολα, τελεία (.) ή παύλα (-). Είναι παραδεκτές λέξεις που αποτελούνται μόνο από τελείες ή μόνο από παύλες. Πόσες διαφορετικές λέξεις μπορούν να σχηματιστούν;

Άσκηση 2: Ένας φοιτητής διαβάζει 0 ή 1 ή 2 ώρες την ημέρα το μάθημα των «Πιθανοτήτων».

α) Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να αφιερώσει ο φοιτητής 5 συνολικά ώρες για τη μελέτη του μαθήματος των «Πιθανοτήτων» σε τρείς διαδοχικές μέρες;

β) Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να αφιερώσει ο φοιτητής συνολικά τουλάχιστον 5 ώρες για τη μελέτη του μαθήματος των «Πιθανοτήτων» σε τρείς διαδοχικές μέρες;

Άσκηση 3: Στο τυχερό παιχνίδι ΤΖΟΚΕΡ κληρώνονται πέντε διαφορετικοί αριθμοί από το 1 έως το 45 χωρίς να έχει σημασία η σειρά κλήρωσης των αριθμών. Κληρώνεται επίσης ο αριθμός τζόκερ από το 1 έως το 20 ο οποίος μπορεί να συμπίπτει με κάποιον από τους 5 αρχικούς αριθμούς. Οι αριθμοί που κληρώνονται αποτελούν τη νικήτρια στήλη του παιχνιδιού. Ένας παίκτης συμπληρώνει μία στήλη, όταν επιλέγει πέντε διαφορετικούς αριθμούς από το 1 έως το 45 και έναν ακόμη αριθμό τζόκερ από το 1 έως το 20. Να υπολογιστούν τα εξής:

1) Ο αριθμός των στηλών που πρέπει να συμπληρώσει ένας παίκτης ώστε να είναι απόλυτα σίγουρος ότι θα πετύχει τη νικήτρια στήλη σε κάθε περίπτωση. (Απάντηση: 24.435.180)

2) Τον αριθμό των στηλών που πρέπει να συμπληρώσει κάποιος παίκτης ώστε να είναι απόλυτα σίγουρος ότι θα πετύχει τη νικήτρια στήλη στην περίπτωση που στην κλήρωση θα συμβούν ταυτόχρονα οι παρακάτω καταστάσεις α) και β):

α) Από τους 5 αρχικούς αριθμούς ο ένας είναι μεταξύ του 1 και του 10, ο δεύτερος μεταξύ του 11 και του 20, ο τρίτος μεταξύ του 21 και του 30, ο τέταρτος μεταξύ του 31 και του 40 και ο πέμπτος μεταξύ του 41 και του 45.
β) Ο αριθμός τζόκερ είναι άρτιος.

(Απάντηση: 500.000 στήλες)

Άσκηση 4: *N* φοιτητές πρόκειται να τοποθετηθούν σε *N* καθίσματα. Να υπολογιστεί ο αριθμός των διαφορετικών τρόπων με τους οποίους μπορούμε να τοποθετήσουμε τους *N* φοιτητές στις *N* θέσεις σε σειρά με την προϋπόθεση ότι μεταξύ δύο συγκεκριμένων από αυτούς πρέπει να κάθονται υποχρεωτικά ακριβώς *k* φοιτητές. Ποιό το αποτέλεσμα της άσκησης για N=10, k =3;

(Απάντηση: 483840, για N=10, k =3).

Άσκηση 5: Τέσσερα παντρεμένα ζευγάρια έχουν αγοράσει οκτώ εισιτήρια θεάτρου που αντιστοιχούν σε οκτώ διαδοχικές θέσεις της ίδιας σειράς. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να καθίσουν τα οκτώ άτομα στις θέσεις έτσι ώστε:
α) να μην υπάρχει κανένας περιορισμός σχετικά με τη θέση που καταλαμβάνει το κάθε άτομο.
β) Άντρες και γυναίκες να κάθονται εναλλάξ.
γ) όλοι οι άνδρες να κάθονται σε διαδοχικές θέσεις και όλες οι γυναίκες να κάθονται σε διαδοχικές θέσεις.
δ) όλες οι γυναίκες να κάθονται σε διαδοχικές θέσεις

(Απάντηση: $8!$, $2.(4!)^2$, $2.(4!)^2$, $5!.4!$)